PART4　指数関数・対数関数の最大・最小

例題

(1)　関数 $y=4^x-2^{x+1}+2$ の最小値と，そのときの x の値を求めよ。

(2)　関数 $y=-(\log_2 x)^2+\log_2 x^4-2\ \left(\frac{1}{2}\leqq x\leqq 8\right)$ の最大値，最小値と，そのときの x の値を求めよ。

Point Pickup

練習

(1)　関数 $y=-2^{2x}+2^{x+2}-1$ $(x \leqq 2)$ の最大値，最小値と，そのときの x の値を求めよ。

(2)　関数 $y=\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^2+4\log_{\frac{1}{2}} 2x$ $(1 \leqq x \leqq 8)$ の最大値，最小値と，そのときの x の値を求めよ。

第13講　PART4 確認問題

1　関数 $y=-2^{2x}+2^{x+1}+3\ (x \leqq 2)$ の最大値，最小値と，

そのときの x の値を求めよ。

$x=$ [ア] のとき　最大値 [イ]

$x=$ [ウ] のとき　最小値 [エオ]

2　関数 $y=\left(\log_{\frac{1}{3}}x\right)^2+2\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{x}{3}\ (1 \leqq x \leqq 27)$ の最大値，最

小値と，そのときの x の値を求めよ。

$x=$ [カキ] のとき　最大値 [ク]

$x=$ [ケ] のとき　最小値 [コ]

PART4　指数関数・対数関数の最大・最小

例題

(1)　関数 $y=4^x-2^{x+1}+2$ の最小値と，そのときの x の値を求めよ。

(2)　関数 $y=-(\log_2 x)^2+\log_2 x^4-2\ \left(\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq 8\right)$ の最大値，最小値と，そのときの x の値を求めよ。

(1)　$2^x=t$ とおくと，$t>0$ …… ①

このとき　$y=(2^x)^2-2\cdot 2^x+2$

$=t^2-2t+2=(t-1)^2+1$

①より，y は

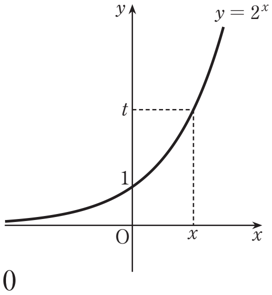
$t=1$ のとき　最小値 1

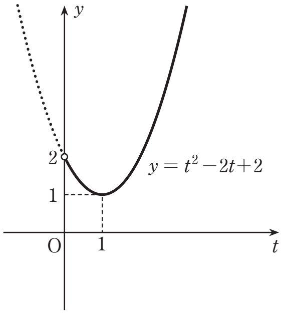
をとる。このとき　$2^x=1$　より　$x=0$

したがって，この関数は

$x=0$ のとき　最小値 1

をとる。





(2)　$\log_2 x=t$ とおくと，$\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq 8$　より　$-1\leqq t\leqq 3$ …… ①

このとき　$y=-(\log_2 x)^2+4\log_2 x-2$

$=-t^2+4t-2=-(t-2)^2+2$

①より，y は

$t=2$ のとき　最大値 2

$t=-1$ のとき　最小値 -7

をとる。

$t=2$ のとき　$\log_2 x=2$　より　$x=2^2=4$

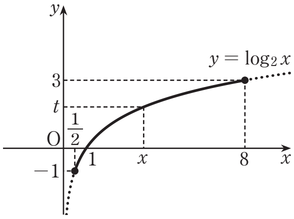
$t=-1$ のとき　$\log_2 x=-1$　より　$x=2^{-1}=\dfrac{1}{2}$

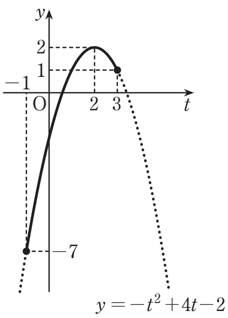
したがって，この関数は

$x=4$ のとき　最大値 2

$x=\dfrac{1}{2}$ のとき　最小値 -7

をとる。





練習

(1)　関数 $y=-2^{2x}+2^{x+2}-1$ $(x \leqq 2)$ の最大値，最小値と，そのときの x の値を求めよ。

(2)　関数 $y=\left(\log_{\frac{1}{2}}x\right)^2+4\log_{\frac{1}{2}}2x$ $(1 \leqq x \leqq 8)$ の最大値，最小値と，そのときの x の値を求めよ。

(1)　$2^x=t$ とおくと，$x \leqq 2$ より　$0<t \leqq 4$ ……①

このとき　$y=-2^{2x}+2^{x+2}-1=-(2^x)^2+4\cdot 2^x-1$

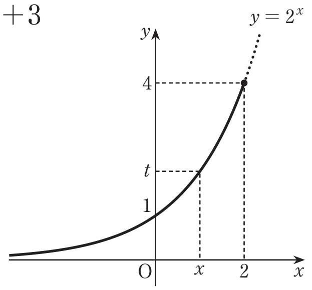
$=-t^2+4t-1=-(t-2)^2+3$

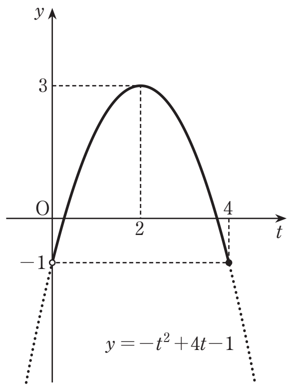
①より，y は

$t=2$ のとき　最大値 3

$t=4$ のとき　最小値 -1

をとる。





$t=2$ のとき　$2^x=2$　より　$x=1$

$t=4$ のとき　$2^x=4$　より　$x=2$

したがって，この関数は

$x=1$ のとき　最大値 3

$x=2$ のとき　最小値 -1

をとる。

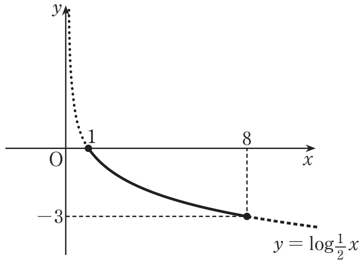
(2)　$\log_{\frac{1}{2}}x=t$ とおくと，$1 \leqq x \leqq 8$ より　$-3 \leqq t \leqq 0$ ……①

このとき　$y=\left(\log_{\frac{1}{2}}x\right)^2+4\log_{\frac{1}{2}}2x$

$=\left(\log_{\frac{1}{2}}x\right)^2+4\left(\log_{\frac{1}{2}}2+\log_{\frac{1}{2}}x\right)$

$=\left(\log_{\frac{1}{2}}x\right)^2+4\log_{\frac{1}{2}}x-4$

$=t^2+4t-4=(t+2)^2-8$

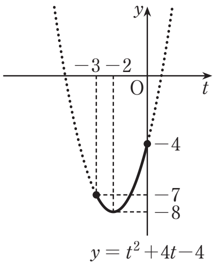


①より，y は

$t=0$ のとき　最大値 -4

$t=-2$ のとき　最小値 -8

をとる。



$t=0$ のとき　$\log_{\frac{1}{2}} x=0$ より　$x=\left(\frac{1}{2}\right)^0=1$

$t=-2$ のとき　$\log_{\frac{1}{2}} x=-2$ より　$x=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=4$

したがって，この関数は

$x=1$ のとき　最大値 -4

$x=4$ のとき　最小値 -8

をとる。

第13講 PART4 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：0，イ：4，ウ：2，エオ：−5

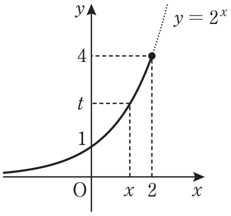
[解説]

$2^x = t$ とおくと，[A]

$x \leqq 2$ より

$0 < t \leqq 4$ ……①

[B]



このとき

$$y = -2^{2x} + 2^{x+1} + 3$$
$$= -(2^x)^2 + 2 \cdot 2^x + 3$$
$$= -t^2 + 2t + 3$$
$$= -(t-1)^2 + 4$$

①より，y は

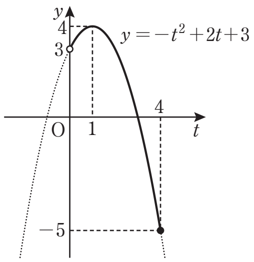
$t=1$ のとき

最大値 4

$t=4$ のとき

最小値 −5

をとる。



$t=1$ のとき　$2^x = 1$ より $x = 0$

$t=4$ のとき　$2^x = 4$ より $x = 2$

したがって，この関数は

$\boldsymbol{x=0}$ **のとき　最大値 4**

$\boldsymbol{x=2}$ **のとき　最小値 −5**

をとる。

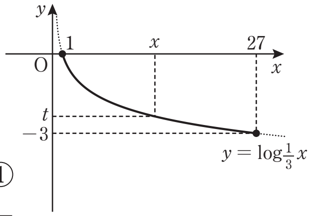
[A]　指数関数の最大値・最小値を求める問題には，$a^x = t$ のように指数関数をおき換えることで，2次関数の最大・最小の問題として解くことができるものがある。

[B]　おき換えた文字の変域に注意。

2 [正解] カキ：27，ク：5，ケ：3，コ：1

[解説]

$\log_{\frac{1}{3}} x = t$ とおくと，[C]



$1 \leqq x \leqq 27$ より

$-3 \leqq t \leqq 0$　……①

[D]

このとき

$$y = \left(\log_{\frac{1}{3}} x\right)^2 + 2\log_{\frac{1}{3}} \frac{x}{3}$$

$$= \left(\log_{\frac{1}{3}} x\right)^2 + 2\left(\log_{\frac{1}{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3}\right)$$

$$= \left(\log_{\frac{1}{3}} x\right)^2 + 2\log_{\frac{1}{3}} x + 2$$

$$= t^2 + 2t + 2$$

$$= (t+1)^2 + 1$$

①より，y は

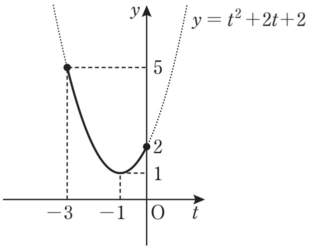
$t = -3$ のとき

最大値 5

$t = -1$ のとき

最小値 1

をとる。



$t = -3$ のとき　$\log_{\frac{1}{3}} x = -3$　より

$$x = \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 27$$

$t = -1$ のとき　$\log_{\frac{1}{3}} x = -1$　より

$$x = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3$$

したがって，この関数は

$x = 27$ のとき　最大値 5

$x = 3$ のとき　最小値 1

をとる。

[C]　対数関数の最大値・最小値を求める問題には，$\log_a x = t$ のように対数関数をおき換えることで，2 次関数の最大・最小の問題として解くことができるものがある。

[D]　おき換えた文字の変域に注意。